代数幾何学シンポジウム記録
1987年度　pp.1-15

Complete intersection の Generic Torelli について.

学術振興会　寺杣　友秀

§0　Introduction.

1. Generic Torelli Theorem.

まず．Generic Torelli Theorem とは．どの様なものなのかを．述べたい。もともと Torelli の定理は．曲線について知られているもであったが．その心は．"果して．周期によって．もとの代数多様体が復元できるのか"という様なものである．一応 Griffith により．formalism らしきものは．存在するといってもよいが必ずしも成り立つわけでもない（Griffith流では）ので．あらたな formalism が必要とされているのかもしれない。それは．臼井．斉藤．清水．今野氏らの今後の研究が大変期待できる．

$\mathbb{P}^n$ 内の Complete intersection に関しては．中間次元以外の cohomology は．周期としてみればもとの $\mathbb{P}^n$ に由来するつまらないものであるから．Torelli の定理を考える上で．中間次元の cohomology のみを考えるという方向が自然で

あると思われる。

今、dを2以上、mを1以上として、nを$m+1$より大きい自然数として固定した時、$\mathbb{P}^n$内の$\underbrace{(d,\cdots,d)}_{(m+1)\text{個}}$-complete intersectionのmoduli空間$\mathcal{M}$を、

$$\mathcal{M}=\{X\subset\mathbb{P}^n \mid X\text{は、smoothな}\underbrace{(d,\cdots,d)}_{(m+1)\text{個}}\text{ complete intersection}\}/(\text{projective equivalence})$$

で定義した時、周期写像を、以下定義する。$p\in\mathcal{M}$に対するcomplete intersectionをX_pとした時、X_pの$(n-m-1)$次元のprimitive cohomology $H_{prim}^{(n-m-1)}(X_p,\mathbb{Z})$には、自然にpolarized Hodge structureの構造がはいるので、これは、Hodge構造の分類空間D/Γ上の点を決める。これによって定まる写像$\mathcal{M}\longrightarrow D/\Gamma$が周期写像である。Generic Torelliは、この写像がgenericにinjectiveか、ということを問題にすることである。

2. Main Theorem の Statement

Theorem. m, n, dを自然数とする。$d\geq 2$とする。次の条件(i)(ii)が成り立つ時、generic Torelli Theoremは成立する。

(i) $n>m+1$

(ii) $d\leq 2\{(m+1)d-(n+1)\}\leq\min\left((d-1)m+(d-2),md\right)$

(注) 実は上の定理は、Variational Torelli を示すというテクニックを使うのだが、(2.2.2)完全交叉 (ex. degree = 8 の K3 とか…) については、Variational Torelli は成立しない。もちろん、$\mathbb{P}^5$ 内の (2.2.2) complete intersection は、K3 なので、Torelli は成立する。)

3. Hyper surface の時の結果 (Donagi の方法)

$m=0$ にあたる時のことすなわち超曲面の時は、Donagi により、いくつかの例外を除いて、Generic Torelli が成り立つことが知られている。それを示すのは、いわゆる Variational Torelli を使うことである。大まく3つのステップ位に分けてみると、次の様になる。1つめのステップは、超曲面の Infinitesimal Variation of Hodge Structure (以下 IVHS と略記する。) を、超曲面 X の方程式 F (ie $X=\{F=0\}$) のことばで書き表わす。すなわち、F の Jacobian ring が、わかれば、それを使って、IVHS が記述できることを考察する。第2ステップは、X の IVHS と、X' の IVHS が同型なら、超曲面 X の方程式 F の Jacobian ring と、X' の方程式 F' の Jacobian ring は同型になることを、証明する。この時、Symmetrizer Lemma は、役に立つ。F の Jacobian ring と、F' の Jacobian ring の同型性は、F と F' の projective equivalence を imply する。そして最後のステップは、

Variational Torelli，すなわち．IVHSの情報が．もとの多様体を復元するのに十分であることがわかれば．それから．Torelliの定理が従うことをみるのである。

4. Complete intersectionの場合の方針

超曲面の場合．1つの方程式が．最終的にprojective equivalentであるかどうかみればよいわけだが．Complete intersectionの時．方程式が2個以上あるので，少し工夫をしなくてはならない。以下．この報告で．やることを．簡単に述べる。

a) Complete intersectionのIVHSがあるalgebraic correspondenceを通じて，$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$内のhypersurfaceのIVHSと同型であること見る。(μ-ring)

b) Specialな場合に帰着されることをみる。

c) ν-ringというringを考えて．それに関するduality

d) Fermat hypersurfaceのspecialなcomplete intersectionの時の計算．

§1. Complete intersection の IVHS について.

d を 2 以上の自然数, n を $m+2$ 以上の自然数とする。X を $\mathbb{P}^n$ 内の $(\underbrace{d,\cdots,d}_{(m+1)\text{個}})$ complete intersection, すなわち, $(m+1)$ 個の d 次超曲面の完全交叉とする。さらに X が smooth であるとして, $F_0,\cdots,F_m$ を degree d の X の定義方程式とする。すなわち X は, $X=\{F_0=\cdots=F_m=0\}$ と $\mathbb{P}^n$ 内で表わされる。この時, $\mathcal{X}$ なる $\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$ 内の超曲面を,

$$\mathcal{X}=\{(\mu,x)\in\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n \mid \mu_0F_0(x)+\cdots+\mu_mF_m(x)=0\}$$

で定義する。これは, $pr_1^*\mathcal{O}(1)\otimes pr_2^*\mathcal{O}(d)$ の section $\mu_0F_0(x)+\cdots+\mu_mF_m(x)$ の 0 点である。

Proposition 1 $\mathbb{P}^m\times X \xhookrightarrow{i} \mathcal{X}$ より induce される map

$$i^*: H^{n+m-1}(\mathcal{X},\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{n-m-1}(X,\mathbb{Q})\otimes H^{2m}(\mathbb{P}^m,\mathbb{Q})$$

は, 同型:

$$H^{n+m-1}_{prim}(\mathcal{X},\mathbb{Q}) \cong H^{n-m-1}_{prim}(X,\mathbb{Q})\otimes H^{2m}(\mathbb{P}^m,\mathbb{Q})$$

をひきおこす。ここで,

$$H^{n+m-1}_{prim}(\mathcal{X},\mathbb{Q}) := \mathrm{Coker}\,(H^{n+m-1}(\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n,\mathbb{Q}) \to H^{n+m-1}(\mathcal{X},\mathbb{Q}))$$

$$H^{n-m-1}_{prim}(X,\mathbb{Q}) := \mathrm{Coker}\,(H^{n-m-1}(\mathbb{P}^n,\mathbb{Q}) \to H^{n-m-1}(X,\mathbb{Q}))$$

である。

証明. 2^{nd} projectionから誘導される mapを$\varphi : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ とすると. $R^{2m}\varphi_* \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}_X$ となる。このことと. Lerayの spectral sequence for φ から出る。 //

これから complete intersection X での話を. hyper surface $\mathfrak{X}$ の話に帰着していくことができる。次の long exact sequenceを考える。

$$\to H^{n+m}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} H^{n+m}(U, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{\mathfrak{X}}^{n+m+1}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q})$$
$$\to H^{n+m+1}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \to \cdots$$

Lemma　α は0-map.

Corollary　$H^{n+m}(U, \mathbb{Q}) \cong H^{n+m-1}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$ は同型.

さて. 上の Corollary の同型を考察する。$H^{n+m}(U, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$ は. De Rhamの定理より $H^{n+m}_{DR}(U/\mathbb{C})$ と同型になるが. これには、

$$H^{n+m}_{DR}(U/\mathbb{C}) \cong H^0(U, \Omega^{n+m})/d\,H^0(U, \Omega^{n+m-1})$$

なる同型を通じて. $\mathfrak{X}$ に添った pole の order による filtration がはいる。そして. これは. $H^{n+m}(U, \mathbb{Q})$ 上の Hodge Structure を定める。この Corollary の同型は. Hodge structure としての同型であることが容易にわかる。以下. この Hodge Structure を計算する。

Fを μ と x の多項式 $F = \mu_0 F_0(x) + \cdots + \mu_m F_m(x)$ とする。Sを $\mathbb{C}[\mu_0, \cdots, \mu_m, x_0, \cdots, x_n]$ として. Jを.

$\partial F/\partial \mu_i$ $(i=0,\cdots,m)$, $\partial F/\partial x_j$ $(j=0,\cdots,n)$ で生成される。
S の ideal, R を S/J とすると。J は bihomogenious ideal with respect to (μ, x) なので。

$R = \bigoplus_{a\geq 0,\, b\geq 0} R_{(a,b)}$,($R_{(a,b)}$ は (μ, x) に関する degree が (a, b) となるもの),

と書ける。Differential の計算をすることにより。次の Proposition が得られる。

Proposition

$$Gr_F^{n+m-p} H_{DR}^{n+m}(U/\mathbb{C}) \simeq R_{(p-(m+1),\, pd-(n+1))}$$

Corollary

$$H^{p,q}_{prim}(X) \cong H^q_{prim}(X, \Omega^p)$$
$$\cong R_{(q,\,(m+q+1)d-(n+1))}.$$

次に IVHS を記述するために。$H^1(X, \Theta_X)$ を記述しよう。

Proposition

$$H^1(X, \Theta_X) \cong R_{(1,d)}$$

なる自然な同型があり。Kodaira-Spencer map は。

$$H^q(X, \Omega^p) \otimes H^1(X, \Theta) \longrightarrow H^{q+1}(X, \Omega^{p-1})$$

は。ring R の ring multiplication から得られる map

$$R_{(q,\,(m+q+1)d-(n+1))} \otimes R_{(1,d)} \rightarrow R_{(q+1,\,(m+q+2)d-(n+1))}$$

とcompatibleである。

<u>Remark</u> moduli 上の点 $X = \{F_0 = \cdots = F_m = 0\}$ での tangent $G = \mu_0 G_0(x) + \cdots + \mu_m G_m(x) \in R_{(1,d)}$ 方向へのXのdeformationは、$F_0 + \varepsilon G_0 = \cdots = F_m + \varepsilon G_m = 0$ で与えられる。

次に、cup product から induce される polarization に対する記述をこの ring R の言葉で書くことにする。

<u>Proposition</u> (Cup product)

標準的に、$R_{(n-m-1,\,(n+m+1)d-2(n+1))}$ から $\mathbb{C}$ への map

$$\mathrm{tr}: R_{(n-m-1,\,(n+m+1)d-2(n+1))} \longrightarrow \mathbb{C}$$

が存在して、次の図式を commute する。$(p+q = n-m-1.)$

$$\begin{array}{ccccc}
H^p_{\mathrm{prim}}(X, \Omega^q) \otimes H^q_{\mathrm{prim}}(X, \Omega^p) & \longrightarrow & H^{p+q}(X, \Omega^{p+q}) & \equiv & \mathbb{C} \\
\wr\wr & & & & \uparrow \mathrm{tr} \\
R_{(p,\,(m+p+1)d-(n+1))} \otimes R_{(q,\,(m+q+1)d-(n+1))} & \longrightarrow & & & R_{(n-m-1,\,(n+m+1)d-2(n+1))}
\end{array}$$

§2. Special case への reduction.

$S_{(1,d)}{}^{0}$ を $(1,d)$ polynomial であって、対応する0点の variety X を $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ で考えた時、smooth であるとする。これには、$GL(m+1) \times GL(n+1)$ が作用する。この時、

$\mathcal{M} = S_{(1,d)}{}^{0} / GL(m+1) \times GL(n+1)$ とおく。

§0で定義された周期写像 $\mathfrak{M} \longrightarrow D/\Gamma$ は、臼井、Peters により、quasi-finite であることが知られている。

Variational Torelli と、Weak global Torelli (= generic Torelli) の関係は、次の principle によって結ばれている。

<u>Principle</u>　$\mathfrak{M}$ のある open set $\mathfrak{M}^0$ が存在して、次の性質を満たすとする。

(i) $\mathfrak{M}^0 \longrightarrow D/\Gamma$ は étale.

(ii) $X_1, X_2 \in \mathfrak{M}^0$ の IVHS: $(H^1(X_i), H^{p,q}(X_i), \nabla_i, Q_i)$ が同型であれば、$X_1 \cong X_2$

この時 Weak global Torelli Theorem が成り立つ。

さて、我々の場合(i)が成り立つことが保証されているから、(ii)の条件を確かめればよい。(ii)については、次の reduction theorem が有効である。

<u>Reduction Theorem</u>　m, d, n を前の様に fix する。今、$\lambda = (m+1)d-(n+1)$ とおいた時、$d \leqq 2\lambda$ が成り立つと仮定する。§1で定義した ring R について、

(*)　$R_{(0,2\lambda)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(R_{(n-m-1)(1,d)}, H^{n-m-1,n-m-1}(X))$ は injective

が成り立つ様な、$F = \mu_0 F_0 + \cdots + \mu_m F_m$ が $S^0_{(1,d)}$ 中に存在したとする。

この時. Principle の (ii) が成立する。

($(*)$ は. $R_{(1,d)}^{\otimes(n-m-1)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(R_{(2,\lambda)}, R_\rho)$,

$\rho = (n-m-1, (n+m+1)d-2(n+1))$ が surjective であること を言えば. 十分である。)

<u>証明</u>. $X \xrightarrow{f} S$ を smooth な. $\mathbb{P}^n$ 内の $(\underbrace{d,\cdots,d}_{(m+1)})$ complete intersection の family とする。$s \in X$ の fiber を X_s と書く。 $H^2(X, \Theta_X) = 0$ なので. $R^1 f_* \Theta_{X/S}$ は locally free sheaf である。ゆえに.

$$(R^1 f_* \Theta_{X/S})^{\otimes(n-m-1)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(f_*(\omega_{X/S}^{\otimes 2}), R^{(n-m-1)} f_*(\omega_{X/S}))$$

が s で surjective なら. ある s を含む openset U があって. 任意の $s' \in U$ 上で. surjective。この条件の成り立つ時.

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Sym}^2 H^0(X_s, \Omega^{n-m-1}) \to \mathrm{Hom}(H^1(X_s, \Theta)^{\otimes(n-m-1)}, \mathbb{C}))$$

$$\cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Sym}^2 H^0(X_s, \Omega^{n-m-1}) \to H^0(X_s, (\Omega^{n-m-1})^{\otimes 2}))$$

であり. $\Omega^{n-m-2} \cong \mathcal{O}(\lambda)$. である。今. $d \leqq 2\lambda$ なので. X の λ-ple embedding の relation はすべて下の kernel で. 生成される。ゆえに. これから X_s は recover される。

Q.E.D.

ゆえに以下. ある特殊なものについて. reduction theorem を示す。まずその前に. V-ring 及び. その duality について考察しよう。

§3 V-ring の duality theorem

n, m を自然数, $n > m+1$ とする。$\lambda_0, \cdots \lambda_n$ を $\mathbb{C}$ の相異なる元とする。L_j, f_i を

$$L_j = \sum_{i=0}^{m} \lambda_j{}^i \mu_i \ , \quad f_i = \sum_{j=0}^{i} \lambda_j{}^i u_j$$

とおく。$\tilde{S} = \mathbb{C}[\mu_0, \cdots, \mu_m, u_0, \cdots, u_m]$, $\tilde{R} = \tilde{S}/(L_j u_j, f_i)_{i=0,\cdots,m,\ j=0,\cdots,n}$ とする。$(L_j u_j, f_i)$ は homogeneous ideal なので, $\tilde{R}$ は bigraded with respect to (μ, u) である。

$$\tilde{R} = \bigoplus_{a \geq 0,\ \ell \geq 0} \tilde{R}_{(a,\ell)}$$ (ここで $\tilde{R}_{(a,\ell)}$ は (μ, u) に関する degree が (a, ℓ)).

<u>Definition-Proposition</u> (Residue-map)

$\xi_i = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) u_i$ とおく。$\tilde{r} : \tilde{R}_{(n-m-1,\, m)} \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\tilde{r}\left(\prod_{i=0}^{n} L_i{}^{a_i} \prod_{j=0}^{n} \xi_j{}^{\ell_j} \right) = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)^{a_i \ell_j} \qquad \left(\begin{array}{l} \Sigma a_i = n-m-1 \\ \Sigma \ell_i = m \end{array} \right)$$

で定義すると well-defined であり, しかも $\tilde{r}$ は isomorphism である。

<u>証明</u> これは λ_i $(i = 0, \cdots, n)$ の対称式に関する関係式を使い, 直接計算によって得られる。

さて．$\tilde{R}(n-m-1,0)$ (resp $\tilde{R}(0,m)$) は．$(m+1)$ 変数．$(n-m-1)$ 次 (resp $(n-m)$ 変数．m 次) 多項式の空間と同型であるから同じ次元である。

<u>Theorem</u> (duality)

自然な paring $\tilde{R}(n-m-1,0) \otimes \tilde{R}(0,m) \longrightarrow \tilde{R}(n-m-1,m) \cong \mathbb{C}$ が．$\tilde{R}$ の積から induce されるが．これは perfect.

<u>Remark</u> $\mathbb{C}^2$ を $sl(2,\mathbb{C})$ の表現と見た時．$S^nS^m(\mathbb{C}^2)$ と $S^mS^n(\mathbb{C}^2)$ は同型であるが．この間にある同型と．上の duality は関連がある様に思われる。(実は著者は．この同型を使って上の duality が示せればよかったのに．と思っている。)．

§4. Special complete intersection of Fermat hyper surface

$\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ を §3 と同様に．$\mathbb{C}$ の相異なる元とする。

Special な．Fermat hyper surface の complete intersection X を．

$$X : \begin{cases} x_0^d + \cdots + x_n^d = 0 \\ \lambda_0 x_0^d + \cdots + \lambda_n x_n^d = 0 \\ \quad \vdots \\ \lambda_0^m x_0^d + \cdots + \lambda_n^m x_n^d = 0 \end{cases} \qquad (\text{in } \mathbb{P}^n)$$

で定義する。X のくわしい性質がわかっているが、これについては、拙著、博士論文を見てもらいたい。

$F_i=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j{}^i x_j{}^d$, $F(\mu,x)=\sum_{i,j}\lambda_j{}^i\mu_i x_j{}^d$ として、

§1 で計算した ring R を計算する。ここで、R は、

$\mathbb{C}[\mu_0,\cdots,\mu_m,x_0,\cdots,x_n]/J$ であり J は、F_i, 及び、

$L_j x_j{}^{d-1}$ ($L_j=\sum_{i=0}^{m}\lambda_j{}^i\mu_i$, $j=0,\cdots n$) で生成された ideal

である。以下、条件 ✱ の下に、$R_{(0,2\lambda)}\longrightarrow \mathrm{Hom}(R_{(n-m-1)(1,d)},R_\rho)$

($\rho=(n-m-1,(n+m+1)d-2(n+1))$) が injective であることを言いたい。

✱ $d\leqq 2\lambda\leqq \min((d-1)m+(d-2),\ md)$

$\mathbb{C}[\mu_0,\cdots,\mu_m,x_0,\cdots,x_n]$ の上には、x_i に 1 の d 乗根をかけることにより、$G=(\mu_d)^{n+1}$ の action が定義できる。

その時、ideal J は、G-stable なので、これは、R の action におちる。G の action は degree preserving なので、

$R_{(a,l)}=\bigoplus_{\chi\in\hat{G}}R_{(a,l)}(\chi)$, ここで、$\hat{G}$ は G の character group, $R_{(a,l)}(\chi)=\{r\in R_{(a,l)}\mid g(r)=\chi(g)(r)\ \forall g\in G\}$

である。$\chi_0\in\hat{G}\cong(\mathbb{Z}/d)^{n+1}$ を、$\chi_0=(-2,\cdots,-2)$ で定義すると、$R_\rho\cong R_\rho(\chi_0)\cong\mathbb{C}(\chi_0)$ となる。ゆえに以下、すべての $\chi\in\hat{G}$ について、

$$R_{(0,2\lambda)}(\chi)\longrightarrow \mathrm{Hom}(R_{(n-m-1)(1,d)}(\chi^{-1}\chi_0),\ R_\rho(\chi_0))$$

が injective であることを見ればよい。

$\tilde{R}$ を §3 で定義した V-ring とする。$x=(\beta_0,\cdots,\beta_n)$ $(0\leq\beta_j\leqq d-1)$ とすると、$R_{(a,l)}(x)\cong\tilde{R}_{(a,l(x))}$ がある $l(x)$ について成立する。これから、この injectivity を、V-ring の duality に、帰着させたい。

<u>Lemma</u> $\lambda=(m+1)d-(n+1)$, $d\leqq\lambda\leq\min\left(m(d-1)+(d-2),\ md\right)$ とする。$\vec{a}=(a_0,\cdots,a_n)$, $\vec{l}=(l_0,\cdots,l_n)$ $(\in\mathbb{Z}^{n+1})$ が

(a) $0\leqq a_i\leqq d-1$, $0\leq l_i\leq d-1$, $(i=0,\cdots,n)$

$a_i+l_i=-2\pmod d$

(b) $\sum_{i=0}^{n}a_i\leq 2\lambda$, $\sum_{i=0}^{n}a_i\equiv 2\lambda\pmod d$

を満たしたとする。この時、

$$a=\left(2\lambda-\sum_{i=0}^{n}a_i\right)/d,\quad l=n-m-1-\left(\sum_{i=0}^{n}l_i/d\right)$$

とすると、$a,l\in\mathbb{Z}$ であり、(1) $0\leqq a\leqq m$, (2) $a+l\leqq m$ (3) $0\leqq l$ が成り立つ。

上の Lemma より、$R_{(0,2\lambda)}(x)\neq0$ $(x=(a_0,\cdots,a_n))$ なら、Lemma の (a) を満たす $(l_0,\cdots,l_n)$ をとることにより、Lemma の結論にでてくる a, l をとり、以下の commutative diagram を得る

$$\begin{tikzcd}
R_{(0,2\lambda)}(x)\otimes R_{(n-m-1)(1,d)}(x^{-1}x_0) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong"] & R_{\rho}(x_0) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\tilde{R}_{(0,a)}\otimes\tilde{R}_{(n-m-1,l)} \arrow[r, "\substack{\text{multiplication}\\ \times(\text{ある monom})}"'] & \tilde{R}_{(n-m-1,m)}\cong\mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{array}{ccc}
\widetilde{R}_{(0,a)} & \xrightarrow{\times(\text{ある monomial})} & \mathrm{Hom}\left(\widetilde{R}_{(n-m-1,\ell)},\ \widetilde{R}_{(n-m-1,m)}\right) \\
{\scriptstyle \times(\text{ある monomial})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times(\text{ある monomial})} \\
\widetilde{R}_{(0,m)} & \xrightarrow[\cong]{} & \mathrm{Hom}\left(\widetilde{R}_{(n-m-1,0)},\ \widetilde{R}_{(n-m-1,m)}\right)
\end{array}
$$

この可換図式より、$\widetilde{R}_{(0,a)} \to \mathrm{Hom}(\widetilde{R}_{(n-m-1,\ell)}, \widetilde{R}_{(n-m-1,m)})$ は injective である。これで、Main Theorem の証明を終る。